Aufgabe I–1

Sei $\mathbb{R}_{>0}$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Sei $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine Funktion, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$yf^{2025}(x) \geq xf(y).$$

Man beweise: Es existiert eine positive ganze Zahl n_0, sodass für alle positiven ganzen Zahlen $n \geq n_0$ und alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$f^n(x) \geq x.$$

Bemerkung. Dabei bezeichnet f^n die n-fache Anwendung von f, d. h. $f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots f}_{n\text{-mal}}(x)\dots))$.

Aufgabe I–2

Auf einem unendlich großen Quadratgitter, von dem einige Felder rot gefärbt sind, sei ein *Roter Turm* eine Figur, die sich in einem Zug um eine beliebige Anzahl an Feldern parallel zu einer der Gitterachsen (vertikal oder horizontal) bewegen kann, wobei sie während des gesamten Zuges auf roten Feldern bleiben muss.

Ausgehend von einem ungefärbten unendlich großen Quadratgitter führt Alice den folgenden Prozess durch: Zunächst färbt sie höchstens 2025 Felder rot. Anschließend platziert sie einige Rote Türme auf paarweise verschiedenen roten Feldern, sodass folgende zwei Regeln erfüllt sind:

- Kein Roter Turm kann einen anderen Roten Turm in einem Zug erreichen.
- Jeder Rote Turm kann jeden anderen Roten Turm in zwei Zügen erreichen.

Man bestimme die größtmögliche Anzahl an Roten Türmen, die Alice in diesem Prozess platzieren kann.

Aufgabe I–3

Sei ABC ein Dreieck. Sein Inkreis ω berühre die Seiten BC, CA und AB in den Punkten D, E bzw. F. Seien P und Q Punkte auf der Geraden BC, die jeweils von D verschieden sind und $PB = BD$ bzw. $QC = CD$ erfüllen. Man beweise, dass sich die Umkreise der Dreiecke PCE und QBF und der Kreis ω in einem gemeinsamen Punkt treffen.

Aufgabe I–4

Eine Teilmenge S der ganzen Zahlen heiße *sächsisch*, wenn für je drei paarweise verschiedene Elemente $a, b, c \in S$ die Zahl $ab + c$ eine Quadratzahl ist. Man zeige, dass jede sächsische Menge endlich ist. Man bestimme die größtmögliche Anzahl von Elementen, die eine sächsische Menge haben kann.

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Fragen: 60 Minuten
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.