Problème I–1

Soit $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$, on ait

$$yf^{2025}(x) \geq xf(y).$$

Montrer qu'il existe un entier strictement positif n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on ait

$$f^n(x) \geq x.$$

Remarque. Ici, f^n désigne la n-ième itération de la fonction f, c'est-à-dire

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{n \text{ fois}}(x)\ldots)).$$

Problème I–2

Sur une grille carrée infinie, certains carrés unitaires peuvent être coloriés en rouge. Une *tour de rubis* est une pièce qui, en un seul coup, peut se déplacer sur cette grille d'un nombre quelconque de carrés dans une direction parallèle à l'un des axes de la grille (horizontalement ou verticalement), à condition de rester uniquement sur des carrés rouges pendant tout le déplacement.

Partant d'une grille carrée infinie initialement non coloriée, Alice effectue la procédure suivante. Premièrement, elle colorie en rouge au plus 2025 carrés unitaires. Après, elle place des tours de rubis sur certains carrés rouges distincts, de sorte que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- Aucune tour de rubis ne peut en atteindre une autre en un seul coup.
- Chaque tour de rubis peut atteindre chacune des autres tours de rubis en exactement deux coups.

Quel est le nombre maximal de tours de rubis qu'Alice peut placer au cours de cette procédure ?

Problème I–3

Soit ABC un triangle. Son cercle inscrit ω est tangent aux côtés BC, CA et AB, aux points D, E et F respectivement. Soient P et Q deux points situés sur la droite BC, distincts de D, tels que $PB = BD$ et $QC = CD$. Montrer que les cercles circonscrits des triangles PCE et QBF, ainsi que le cercle ω, passent tous par un même point.

Problème I–4

Un sous-ensemble S d'entiers est appelé *saxon* si pour tous trois éléments deux à deux distincts a, b, $c \in S$, le nombre $ab + c$ est le carré d'un entier. Montrer que tout ensemble saxon est fini. Déterminer le plus grand nombre possible d'éléments qu'un ensemble saxon peut avoir.

Durée : 5 heures
Temps pour les questions : 60 min
Chaque problème vaut 8 points.
L'ordre des problèmes ne dépend pas de la difficulté.