



Zadatak I–1

Neka $\mathbb{R}^+$ označava skup svih pozitivnih realnih brojeva. Neka je $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ funkcija takva da za sve $x, y \in \mathbb{R}^+$ vrijedi

$$yf^{2025}(x) \geq xf(y).$$

Dokaži da postoji prirodan broj n_0 takav da za sve prirodne brojeve $n \geq n_0$ i za sve $x \in \mathbb{R}^+$ vrijedi

$$f^n(x) \geq x.$$

Napomena. f^n označava kompoziciju funkcije f same sa sobom n puta, $f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x) \dots))}_n$.

Zadatak I–2

Ana igra sljedeću igru na beskonačnoj ploči podijeljenoj na jedinične kvadratiće, koji se u nastavku nazivaju *polja ploče*. Na početku igre oboji najviše 2025 polja na ploči u crveno. Nakon toga postavlja neki broj topova na crvena polja tako da se na bilo kojem polju nalazi najviše jedan top. Top se u jednom potezu u Aninoj igri može pomicati na isti način kao u šahu (tj. za bilo koji broj polja u horizontalnom ili vertikalnom smjeru), uz ograničenje da sva polja kroz koja top prođe prilikom pomicanja, kao i polje na koje se pomakne, moraju biti crveno obojana polja.

Odredi najveći broj topova koje Ana može postaviti na ploču tako da budu zadovoljena sljedeća dva uvjeta:

- Niti jedan top u jednom potezu ne može doći na polje na kojem se nalazi neki drugi top.
- Svaki top u dva poteza može doći na svako polje na kojem se nalazi bilo koji drugi top.

Zadatak I–3

Upisana kružnica ω trokuta ABC dira stranice trokuta $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama D , E i F . Neka su P i Q točke na pravcu BC , različite od D , takve da je $|PB| = |BD|$ i $|QC| = |CD|$. Dokaži da opisane kružnice trokuta PCE i QBF i kružnica ω prolaze kroz istu točku.

Zadatak I–4

Za podskup S skupa cijelih brojeva kažemo da je *saksonski* ako za svaka tri u parovima različita broja $a, b, c \in S$ vrijedi da je $ab + c$ kvadrat cijelog broja.

Dokaži da je svaki saksonski skup konačan. Odredi najveći mogući broj elemenata koje saksonski skup može imati.