



I–1. Feladat

Legyen $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmaza. Legyen $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ olyan függvény, melyre minden $x, y \in \mathbb{R}^+$ esetén teljesül, hogy

$$yf^{2025}(x) \geq xf(y).$$

Bizonyítsd be, hogy létezik olyan n_0 pozitív egész szám, melyre minden $n \geq n_0$ pozitív egész szám és minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén teljesül, hogy

$$f^n(x) \geq x.$$

Megjegyzés. Itt f^n az f függvény n -szer való alkalmazását jelöli, vagyis

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x) \dots))}_{n\text{-szer}}.$$

I–2. Feladat

Egy végtelen négyzetrácson, melynek néhány egységmezője pirosra van színezve, a *rubinbástya* olyan bábu, mely egy lépésben egy irányban az egyik rácsvonallal párhuzamosan (azaz vagy függőlegesen vagy vízszintesen) akármennyit elmozdulhat úgy, hogy a lépés során mindvégig piros mezőkön maradjon.

Egy kezdetben színezetlen végtelen négyzetrácson Ábel a következő eljárást végzi. Először kiszínezi legfeljebb 2025 egységmezőt pirosra. Ezután néhány különböző piros mezőre feltesz egy-egy rubinbástyát a következő két szabályt betartva:

- Egyik rubinbástya sem érheti el egy lépésben semelyik másikat.
- Bármelyik rubinbástya bármelyik másikat el tudja érni két lépésben.

Határozd meg azt a legnagyobb számot, amennyi rubinbástyát Ábel le tud helyezni egy ilyen eljárás során.

I–3. Feladat

Az ABC háromszög beírt köre ω , mely a BC , CA és AB oldalakat rendre a D , E és F pontokban érinti. Legyenek P és Q olyan, D -től különböző pontok a BC egyenesen, melyekre $PB = BD$ és $QC = CD$. Bizonyítsd be, hogy a PCE és QBF háromszögek körülírt körei, valamint az ω kör egy ponton mennek át.

I–4. Feladat

Egy egész számokból álló S halmazt *szász halmaznak* nevezünk, ha bármely $a, b, c \in S$ páronként különböző elemeire $ab + c$ egy egész szám négyzete. Bizonyítsd be, hogy minden szász halmaz véges, továbbá határozd meg azt a legnagyobb számot, ahány elemből állhat egy szász halmaz.