



Zadanie I–1

Niech $\mathbb{R}^+$ będzie zbiorem dodatnich liczb rzeczywistych. Niech $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ będzie funkcją taką, że dla wszystkich liczb $x, y \in \mathbb{R}^+$ mamy

$$yf^{2025}(x) \geq xf(y).$$

Udowodnić, że istnieje dodatnia liczba całkowita n_0 , taka że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq n_0$ i dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}^+$ mamy

$$f^n(x) \geq x.$$

Uwaga. Przez f^n oznaczamy tu n -krotne złożenie funkcji f , to znaczy $f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{n \text{ razy}}$.

Zadanie I–2

Na nieskończonej szachownicy, której pewne pola są pomalowane na czerwono, *rubinowa wieża* może w jednym ruchu przemieścić się o dowolną liczbę pól w kierunku poziomym albo pionowym, o ile przez cały czas będzie poruszać się po czerwonych polach.

Zaczynając od niepomalowanej szachownicy Iga przeprowadza następującą procedurę: Na początku zamalowuje co najwyżej 2025 pól na czerwono. Następnie kładzie pewną liczbę rubinowych wież na parami różnych czerwonych polach w taki sposób, by spełniały dwie zasady:

- Żadna rubinowa wieża nie może dotrzeć do żadnej innej rubinowej wieży w jednym ruchu.
- Każda rubinowa wieża może dotrzeć do każdej innej rubinowej wieży w dwóch ruchach.

Wyznaczyć największą możliwą liczbę rubinowych wież jaką Iga może położyć w czasie tej procedury.

Zadanie I–3

Niech ABC będzie trójkątem. Jego okrąg wpisany ω jest styczny do boków BC , CA i AB w punktach D , E i F , odpowiednio. Niech P oraz Q będą punktami na prostej BC różnymi od D , takimi że $PB = BD$ oraz $QC = CD$. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach PCE i QBF oraz okrąg ω mają punkt wspólny.

Zadanie I–4

Podzbiór S zbioru liczb całkowitych nazywamy *saskim* jeśli dla dowolnych parami różnych a , b , $c \in S$ liczba $ab + c$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że każdy zbiór saski jest skończony, oraz znaleźć największą liczbę elementów jaką taki zbiór może mieć.