



Úloha I–1

Nech $\mathbb{R}^+$ označuje množinu kladných reálnych čísel. Daná je funkcia $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ taká, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$yf^{2025}(x) \geq xf(y).$$

Dokážte, že existuje kladné celé číslo n_0 také, že pre ľubovoľné kladné celé číslo $n \geq n_0$ a pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f^n(x) \geq x.$$

Poznámka. Zápis f^n označuje funkciu f aplikovanú n -krát, čiže $f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x) \dots))}_{n\text{-krát}}$.

Úloha I–2

Predpokladajme, že v nekonečnej štvorčkovej sieti sú niektoré políčka zafarbené načerveno. Potom *rubínová veža* je figúrka, ktorá sa môže v jednom ťahu posunúť o ľubovoľný počet políčok v jednom smere rovnobežnom s čiarami mriežky (buď vodorovne, alebo zvislo) tak, aby ostala na červených políčkach po celý čas počas ťahu.

Začínajúc s nezafarbenou nekonečnou štvorčkovou sieťou, Alica vykoná nasledovný proces: Najprv zafarbí najviac 2025 políčok načerveno. Potom umiestni niekoľko rubínových veží na po dvoch rôzne červené políčka tak, aby dodržala nasledovné podmienky:

- Žiadna rubínová veža sa nevie dostať jedným ťahom na políčko, kde stojí iná rubínová veža.
- Každá rubínová veža sa vie dvomi ťahmi dostať na ľubovoľné políčko, kde stojí iná rubínová veža.

Nájdite najväčší možný počet rubínových veží, ktorý Alica môže umiestniť počas takéhoto procesu.

Úloha I–3

Nech ABC je trojuholník. Jeho vpísaná kružnica ω sa dotýka strán BC , CA a AB postupne v bodoch D , E a F . Body P a Q , rôzne od bodu D , ležia na priamke BC tak, že $|PB| = |BD|$ a $|QC| = |CD|$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkmi PCE a QBF a kružnica ω prechádzajú spoločným bodom.

Úloha I–4

Podmnožinu S množiny celých čísel nazvime *saskou*, ak pre ľubovoľné tri po dvoch rôzne prvky $a, b, c \in S$ je číslo $ab + c$ druhou mocninou nejakého celého čísla. Dokážte, že každá saská množina je konečná. Ďalej určte najväčší možný počet prvkov, ktoré saská množina môže obsahovať.