



Naloga I–1

Naj bo $\mathbb{R}^+$ množica pozitivnih realnih števil. Naj bo $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ taka funkcija, da za vse $x, y \in \mathbb{R}^+$ velja

$$yf^{2025}(x) \geq xf(y).$$

Dokaži, da obstaja naravno število n_0 , tako da za vsa naravna števila $n \geq n_0$ in za vse $x \in \mathbb{R}^+$ velja

$$f^n(x) \geq x.$$

Opomba. Tu f^n označuje funkcijo f uporabljeno n -krat zapored: $f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{n\text{-krat}}.$

Naloga I–2

Na neskončni kvadratni mreži, na kateri je nekaj enotskih kvadratkov pobarvanih rdeče, je *krvava trdnjava* figura, ki se lahko v eni potezi premakne za poljubno število kvadratkov v eni izmed smeri, ki so vzporedne z mrežnimi črtami (navpično ali vodoravno), pri čemer mora med premikom vselej ostati na rdečih kvadratih.

Začevši z nepobarvano neskončno kvadratno mrežo Alica izvede sledeči proces: najprej pobarva največ 2025 enotskih kvadratkov rdeče. Nato postavi nekaj krvavih trdnjav na paroma različne rdeče kvadratke, tako da

- nobena krvava trdnjava ne more v eni sami potezi doseči druge in
- vsaka krvava trdnjava lahko v dveh potezah doseže poljubno drugo.

Določi največje možno število krvavih trdnjav, ki jih lahko Alica postavi med tem procesom.

Naloga I–3

Naj bo ABC trikotnik. Njegova včrtana krožnica ω se stranic BC , CA , AB dotika zaporedoma v točkah D , E in F . Naj bosta P in Q od D različni točki na premici BC , za kateri velja $PB = BD$ in $QC = CD$. Dokaži, da se očrtani krožnici trikotnikov PCE in QBF ter krožnica ω sekajo v skupni točki.

Naloga I–4

Podmnožica celih števil S je *saksonska*, če je za vse trojice paroma različnih elementov $a, b, c \in S$ število $ab + c$ kvadrat nekega celega števila. Dokaži, da je vsaka saksonska množica končna. Določi največje možno število elementov saksonske množice.