



Задача І–1

Нехай $\mathbb{R}^+$ позначає множину додатних дійсних чисел. Дано функцію $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ таку, що для довільних $x, y \in \mathbb{R}^+$ виконується нерівність

$$yf^{2025}(x) \geq xf(y).$$

Доведіть, що існує натуральне число n_0 таке, що для всіх натуральних чисел $n \geq n_0$ та для усіх $x \in \mathbb{R}^+$ справджується нерівність

$$f^n(x) \geq x.$$

Примітка. Тут f^n позначає функцію f , застосовану n разів. Іншими словами $f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x) \dots))}_n$.

Задача І–2

На нескінченній клітчастій дошці, на якій деякі одиничні квадратики зафарбовані червоним кольором, *полум'яною турою* назвемо фігуру, що за один хід може переміститися на декілька комірок в напрямку, паралельному лініям сітки (горизонтально або вертикально), знаходячись на червоних комірках протягом усього ходу. Починаючи з непофарбованої нескінченної клітчастої дошки Марина виконує наступну процедуру: спочатку вона зафарбовує не більше ніж 2025 одиничних клітинок червоним кольором. Після цього вона розміщує декілька полум'яних тур на попарно різні червоні комірки так, що наступні дві умови виконуються:

- Жодна полум'яна тура не може потрапити в комірку жодної іншої полум'яної тури за один хід.
- Кожна полум'яна тура може потрапити в комірку кожної іншої полум'яної тури за два ходи.

Знайдіть найбільшу можливу кількість полум'яних тур, які Марина могла розмістити протягом цієї процедури.

Задача І–3

Дано трикутник ABC . Його вписане коло ω дотикається до сторін BC , CA та AB в точках D , E та F відповідно. Нехай P та Q — такі точки на прямій BC , відмінні від D , що $PB = BD$ та $QC = CD$. Доведіть, що описані кола трикутників PCE та QBF і коло ω мають спільну точку.

Задача І–4

Підмножина S множини цілих чисел називається *Саксонською*, якщо для довільних трьох попарно різних елементів $a, b, c \in S$ число $ab + c$ є квадратом цілого числа. Доведіть, що довільна Саксонська множина скінченна. Знайдіть найбільшу можливу кількість елементів, яку може містити Саксонська множина.