



Příklad T-1

Budulínek má n mincí s celočíselnými hodnotami $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n > 0$. Stojí před automatem, který nabízí n tyčinek s kladnými celočíselnými cenami $b_1, b_2, \dots, b_n$. Budulínek si všiml, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$b_1 + b_2 + \dots + b_i \geq c_1 + c_2 + \dots + c_i.$$

Dále platí, že celková hodnota Budulínekových mincí je stejná jako součet cen všech tyčinek. Tyčinky lze kupovat v libovolném pořadí. Aby si Budulínek koupil i -tou tyčinku, musí do automatu naházet mince o celkové hodnotě alespoň b_i . Pokud však zaplatí více, automat mu žádné peníze nevrátí. Dokažte, že Budulínek si může koupit alespoň polovinu tyčinek.

Příklad T-2

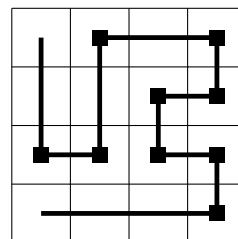
Nechť $\mathbb{R}^+$ značí množinu kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(xy) + f(x) = f(y)f(xf(y)) + f(x)f(y)$$

a že existuje nanejvýš jedno číslo $a \in \mathbb{R}^+$, pro něž $f(a) = 1$.

Příklad T-3

Had v tabulce $n \times n$ je cesta, která se sestává z úseček mezi středy sousedních políček, prochází středy všech políček a navštíví každé políčko právě jednou. Dvě políčka jsou zde považována za sousední, pokud sdílí hranu. Všimněme si, že všechny úsečky tvořící hada jsou rovnoběžné s některou ze stran políček v tabulce. Na obrázku je příklad hada v tabulce 4×4 . Tento had má devět pravoúhlých zatáček, které jsou vyznačené malými černými čtverečky.



Uvažme hada skrze 2025 políček tabulky 45×45 . Kolik nejvíce pravoúhlých zatáček může takový had mít?

Příklad T-4

Nechť n je kladné celé číslo. V provincii Tramtárie leží $100n$ měst, každá dvě jsou spojena přímkou cestou a každá z těchto cest má mýtnou bránu vybírající nějaké kladné mýto. Mýto z každé brány se rozděluje rovnoměrně mezi města na konci příslušné cesty (to znamená, že každé z oněch dvou měst dostane polovinu příjmu). Celkový mýtní příjem každého města je součet příjmů, které dostává ze $100n - 1$ mýtných bran na svých cestách.

Nový zákon nařizuje, aby mýto z některých bran vybírala spolková vláda namísto měst na koncích příslušné cesty. Guvernér Tramtárie rozhoduje o tom, které brány to budou. Starostové měst vyžadují, aby součet příjmů ze zbývajících bran každému městu dával alespoň 99 % jeho původního příjmu.

V závislosti na n najděte největší kladné celé číslo k takové, že guvernér může vždy vybrat k mýtných bran, z nichž bude příjmy dostávat spolková vláda, a zároveň vyhovět požadavku starostů.



Příklad T–5

Je dán trojúhelník ABC takový, že $|AB| < |AC|$. Označme jako D patu výšky z A na BC . Nechť E je bod takový, že $ABEC$ je rovnoběžník. Ať M je bod uvnitř trojúhelníku ABC splňující $|MB| = |MC|$. Nechť F je obraz bodu D v osové souměrnosti podle tečny kružnice opsané trojúhelníku ADM v bodě M . Dokažte, že $|AF| = |DE|$.

Příklad T–6

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s vnitřním bodem D splňujícím $|\sphericalangle BDC| = 180^\circ - |\sphericalangle BAC|$. Přímky BD a AC se protínají v bodě E , obdobně se přímky CD a AB protínají v bodě F . Body $P \neq E$ a $Q \neq F$ leží na přímce EF tak, že platí $|BP| = |BE|$ a $|CQ| = |CF|$. Předpokládejme, že úsečky AP a AQ protínají kružnici ω opsanou trojúhelníku ABC postupně v bodech $R \neq A$ a $S \neq A$. Dokažte, že přímky RF a SE se protínají na kružnici ω .

Příklad T–7

Buď n kladné celé číslo takové, že součet kladných dělitelů $n^2 + n + 1$ je dělitelný třemi. Dokažte, že lze rozdělit kladné dělitele $n^2 + n + 1$ do tří množin takových, že součin všech prvků v každé množině je stejný.

Příklad T–8

Rozhodněte, zda následující tvrzení platí pro libovolný polynom P stupně alespoň 2 s nezápornými celočíselnými koeficienty: Existuje kladné celé číslo m takové, že pro nekonečně mnoho kladných celých čísel n má číslo $P^n(m)$ více než n různých kladných dělitelů.

Poznámka. Výraz P^n zde značí P aplikované n -krát, tedy $P^n(x) = \underbrace{P(P(\dots P(x) \dots))}_{n\text{-krát}}$.