



beide Städte erhalten jeweils die Hälfte der Einnahmen). Die Gesamteinnahmen einer Stadt errechnen sich aus der Summe der Einnahmen, die die Stadt von den Mautstationen der $100n - 1$ anliegenden Straßen erhält.

Gemäß einem neuen Gesetz sollen nun die Einnahmen einiger Mautstationen nicht mehr an die anliegenden Städte, sondern direkt an die Bundesregierung fließen. Der Gouverneur von Lapp-land darf diese Mautstationen auswählen. Die Bürgermeister der Städte fordern, dass für jede Stadt die Summe der Einnahmen, die sie nach der Änderung aus den verbleibenden Mautstationen noch erhält, mindestens 99% der früheren Gesamteinnahmen beträgt.

Man bestimme, in Abhängigkeit von n , die größte positive ganze Zahl k , sodass der Gouverneur immer k Mautstationen auswählen kann, deren Einnahmen zukünftig an die Bundesregierung fließen, und dabei die Forderung der Bürgermeister erfüllt wird.

Aufgabe T-5

Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB < AC$. Sei D der Fußpunkt des Lotes von A auf BC . Sei E der Punkt, für den $ABEC$ ein Parallelogramm ist. Sei M ein Punkt im Inneren des Dreiecks ABC , für den $MB = MC$ gilt. Sei F der Punkt, den man erhält, wenn man D an der Tangente an den Umkreis des Dreiecks ADM durch M spiegelt. Man beweise, dass $AF = DE$.

Aufgabe T-6

Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit einem inneren Punkt D , für den $\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC$ gilt. Die Geraden BD und AC schneiden einander im Punkt E , und die Geraden CD und AB schneiden einander im Punkt F . Die Punkte $P \neq E$ und $Q \neq F$ liegen auf der Geraden EF und erfüllen $BP = BE$ bzw. $CQ = CF$. Angenommen, die Strecken AP und AQ schneiden den Umkreis ω des Dreiecks ABC erneut in den Punkten $R \neq A$ bzw. $S \neq A$. Man beweise, dass die Geraden RF und SE einander auf ω schneiden.

Aufgabe T-7

Sei n eine positive ganze Zahl, sodass die Summe der positiven Teiler von $n^2 + n + 1$ durch 3 teilbar ist.

Man beweise: Die Menge der positiven Teiler von $n^2 + n + 1$ kann so in drei Mengen partitioniert werden, dass für jede der drei Mengen das Produkt ihrer Elemente dasselbe ist.

Aufgabe T-8

Man entscheide, ob folgende Aussage für jedes Polynom P mit Grad mindestens 2 und nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten gilt:

Es existiert eine positive ganze Zahl m , sodass für unendlich viele positive ganze Zahlen n die Zahl $P^n(m)$ mehr als n paarweise verschiedene positive Teiler besitzt.

Bemerkung. Dabei bezeichnet P^n die n -fache Anwendung von P , d. h. $P^n(x) = \underbrace{P(P(\dots P(x) \dots))}_{n\text{-mal}}$.