



Problème T-1

Bob a n pièces dont les valeurs sont des nombres entiers

$$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n > 0.$$

Il se trouve devant un distributeur automatique qui propose n barres chocolatées dont les prix sont des nombres entiers strictement positifs $b_1, b_2, \dots, b_n$. Bob remarque que pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$b_1 + b_2 + \dots + b_i \geq c_1 + c_2 + \dots + c_i.$$

De plus, la valeur totale des pièces de Bob est égale à la somme des prix de toutes les barres chocolatées. Les barres chocolatées peuvent être achetées dans n'importe quel ordre. Pour acheter la i -ème barre chocolatée, Bob doit insérer des pièces d'une valeur totale d'au moins b_i . Cependant, la machine ne lui rend pas la monnaie. Montrer que Bob peut acheter au moins la moitié des barres chocolatées.

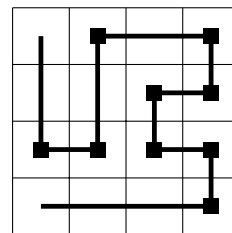
Problème T-2

Soit $\mathbb{R}_{>0}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ satisfaisant les deux propriétés suivantes :

- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$, on a $f(xy) + f(x) = f(y)f(xf(y)) + f(x)f(y)$.
- Il existe au plus un nombre $a \in \mathbb{R}_{>0}$ telle que $f(a) = 1$.

Problème T-3

Un *serpent* dans une grille $n \times n$ est un chemin composé de segments de droite entre les centres de cellules adjacentes, passant par les centres de toutes les n^2 cellules de la grille, et qui visite chaque cellule exactement une fois. Deux cellules de la grille sont considérées comme adjacentes si elles partagent un bord. Noter que tous les segments d'un serpent sont parallèles aux lignes de la grille. La figure montre un exemple de serpent dans une grille 4×4 . Ce serpent effectue neuf virages à 90° , marqués par les petits carrés noirs.



Considérons maintenant un serpent traversant les 2025 cellules d'une grille de 45×45 . Quel est le nombre maximal de virages à 90° que ce serpent peut effectuer ?

Problème T-4

Soit n un nombre entier strictement positif. Dans la province de Laplandia, il y a $100n$ villes, toutes connectées les unes aux autres par des routes directes. Chacune de ces routes dispose d'un péage qui perçoit un montant strictement positif de revenus. Pour chaque route, les revenus du péage sont répartis à parts égales entre les deux villes situées à ses extrémités (ce qui signifie que chacune des deux villes reçoit la moitié des revenus). Pour chaque ville, le revenu total du péage est donné par la somme des revenus qu'elle reçoit des $100n - 1$ péages situés sur ses routes.

Durée : 5 heures

Temps pour les questions : 60 min

Chaque problème vaut 8 points.

L'ordre des problèmes ne dépend pas de la difficulté.



Selon une nouvelle loi, les revenus de certains péages seront collectés par le gouvernement fédéral plutôt que par les villes adjacentes. Le gouverneur de Laplandia est autorisé à choisir ces péages. Les maires des villes exigent que, pour chaque ville, la somme des revenus restants qu'elle perçoit des autres stations de péage après ce changement soit au moins égale à 99% de ses anciens revenus totaux provenant des péages.

Déterminer le plus grand entier strictement positif k , en fonction de n , tel que le gouverneur puisse toujours choisir k péages dont les revenus seront perçus par le gouvernement fédéral, tout en satisfaisant la demande des maires des villes.

Problème T-5

Soit ABC un triangle aigu tel que $AB < AC$. On note D le pied de la perpendiculaire issue de A sur la droite BC . Soit E le point tel que $ABEC$ est un parallélogramme. Soit M un point situé à l'intérieur du triangle ABC tel que $MB = MC$. Soit F le symétrique du point D par rapport à la tangente au cercle circonscrit au triangle ADM en M . Montrer que $AF = DE$.

Problème T-6

Soit ABC un triangle aigu et soit D un point intérieur tel que $\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC$. Les droites BD et AC se coupent au point E , et les droites CD et AB se coupent au point F . Les points $P \neq E$ et $Q \neq F$ appartiennent à la droite EF et vérifient $BP = BE$ et $CQ = CF$. On suppose que les segments AP et AQ recoupent le cercle circonscrit ω de ABC en $R \neq A$ et $S \neq A$, respectivement. Montrer que les droites RF et SE se coupent sur le cercle ω .

Problème T-7

Soit n un entier strictement positif tel que la somme des diviseurs strictement positifs de $n^2 + n + 1$ soit divisible par 3. Montrer qu'il est possible de partitionner l'ensemble des diviseurs strictement positifs de $n^2 + n + 1$ en trois ensembles disjoints tels que le produit de tous les éléments de chaque ensemble soit le même.

Problème T-8

Déterminer si l'affirmation suivante est vraie pour tous les polynômes P de degré au moins 2 avec des coefficients entiers positifs ou nuls :

Il existe un entier strictement positif m tel que, pour un nombre infini d'entiers strictement positifs n , le nombre $P^n(m)$ a au moins $n + 1$ diviseurs strictement positifs distincts.

Remarque. Ici, P^n désigne la composition de P avec lui-même n fois, c'est-à-dire $P^n(x) = \underbrace{P(P(\dots P(x) \dots))}_{n \text{ fois}}$.