Zadatak T–1

Boris ima n kovanica s cjelobrojnim vrijednostima $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_n > 0$. Automat sa slatkišima sadrži n čokoladica s pozitivnim cjelobrojnim cijenama $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Boris je uočio da za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_i \geqslant c_1 + c_2 + \cdots + c_i.$$

Boris je također izračunao da je ukupna vrijednost svih njegovih kovanica jednaka ukupnoj cijeni svih čokoladica.

Kako bi kupio čokoladicu s cijenom b_i, Boris mora umetnuti kovanice u automat čija je ukupna vrijednost barem b_i. Pritom automat ne vraća ostatak. Boris može kupovati čokoladice u bilo kojem poretku. Dokaži da Boris može kupiti barem pola čokoladica iz automata.

Zadatak T–2

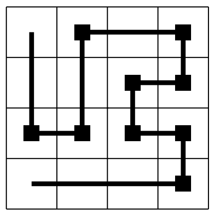
Neka $\mathbb{R}^+$ označava skup svih pozitivnih realnih brojeva. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}^+$ vrijedi

$$f(xy) + f(x) = f(y)f\big(xf(y)\big) + f(x)f(y)$$

te da postoji najviše jedan $a \in \mathbb{R}^+$ takav da je $f(a) = 1$.

Zadatak T–3

Zmija na kvadratnoj ploči dimenzija $n \times n$ je put sastavljen od ravnih linija koje povezuju središta susjednih polja i koji pritom prolazi kroz središta svih n^2 polja ploče točno jednom. Dva polja ploče smatramo susjednima ako imaju zajedničku stranicu.
Slika prikazuje primjer zmije na ploči dimenzija 4×4 koja ima ukupno devet pravokutnih zavoja označenih crnim kvadratićima.



Odredi najveći broj pravokutnih zavoja koji može imati zmija koja prolazi kroz svih 2025 polja na ploči dimenzija 45×45.

Zadatak T–4

Neka je n prirodan broj. U dalekoj zemlji Laplandiji postoji $100n$ gradova koji su povezani cestama tako da između svaka dva grada postoji direktna dvosmjerna cesta. Na svakoj cesti između dva grada se plaća neki pozitivan iznos cestarine koju gradovi na krajevima te ceste dijele ravnomjerno među sobom (tj. na dva jednaka dijela).

Prema novom zakonu, predsjednik Laplandije može odabrati neke ceste čiju cestarinu će prikupljati vlada umjesto gradova na krajevima te ceste. Gradonačelnici svih gradova potpisali su sporazum s vladom prema kojem je dogovoreno sljedeće: ukupna vrijednost cestarine koju bilo koji grad prikupi nakon uvođenja tog zakona mora iznositi barem 99% ukupne vrijednosti cestarine koju taj grad prikupi prije uvođenja zakona. Odredi najveći prirodan broj k, ovisno o n, takav da predsjednik Laplandije može odabrati k cesta s kojih će vlada prikupljati cestarinu tako da sporazum između vlade i gradonačelnika bude ispunjen.

Vrijeme rješavanja: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Poredak zadataka ne ovisi o njihovoj težini.

Zadatak T–5

U šiljastokutnom trokutu ABC vrijedi $|AB| < |AC|$. Točka D je nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$. Neka je E točka takva da je četverokut $ABEC$ paralelogram. Neka je M točka unutar trokuta ABC takva da vrijedi $|MB| = |MC|$. Neka je F osnosimetrična slika točke D s obzirom na tangentu opisane kružnice trokuta ADM u točki M. Dokaži da je $|AF| = |DE|$.

Zadatak T–6

Neka je D točka unutar šiljastokutnog trokuta ABC takva da vrijedi $\sphericalangle BDC = 180° - \sphericalangle BAC$. Pravci BD i AC se sijeku u točki E, a pravci CD i AB se sijeku u točki F. Neka su $P \neq E$ i $Q \neq F$ točke na pravcu EF takve da je $|BP| = |BE|$ i $|CQ| = |CF|$. Dužine $\overline{AP}$ i $\overline{AQ}$ ponovno sijeku opisanu kružnicu ω trokuta ABC redom u točkama R i S. Dokaži da se pravci RF i SE sijeku na kružnici ω.

Zadatak T–7

Neka je n prirodan broj takav da je *zbroj* svih pozitivnih djelitelja broja $n^2 + n + 1$ djeljiv s 3.

Dokaži da je moguće particionirati skup svih pozitivnih djelitelja broja $n^2 + n + 1$ na tri skupa tako da su *umnošci* svih elemenata pojedinog skupa međusobno jednaki.

Zadatak T–8

Odredi je li sljedeća tvrdnja istinita za sve polinome P stupnja barem 2 s nenegativnim cjelobrojnim koeficijentima:

Postoji prirodan broj m takav da za beskonačno mnogo prirodnih brojeva n vrijedi da broj $P^n(m)$ ima više od n različitih pozitivnih djelitelja.

Napomena. P^n je kompozicija polinoma P sa samim sobom n puta: $P^n(x) = \underbrace{P(P(\ldots P}_{n \text{ puta}}(x)\ldots))$.

Vrijeme rješavanja: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Poredak zadataka ne ovisi o njihovoj težini.