



T–1. Feladat

Bálintnak n érmeje van, melyek értékei

$$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n > 0$$

egészek. Egy automata előtt áll, melynek kínálatában n darab bonbon található, melyek árai a $b_1, b_2, \dots, b_n$ pozitív egészek. Bálint észrevette, hogy minden $i \in \{1, \dots, n\}$ -re teljesül, hogy

$$b_1 + b_2 + \dots + b_i \geq c_1 + c_2 + \dots + c_i.$$

Továbbá Bálint érmeinek összértéke megegyezik a bonbonok árainak összegével. A bonbonok tetszőleges sorrendben megvehetők. Ahhoz, hogy Bálint megvegye az i -edik bonbont, be kell dobnia valahány érmét, melyek összértéke legalább b_i . Viszont az automata nem ad visszajárót.

Bizonyítsátok be, hogy Bálint meg tudja venni a bonbonok legalább felét.

T–2. Feladat

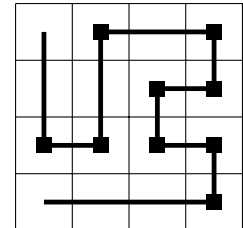
Legyen $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmaza. Határozzátok meg az összes olyan $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényt, melyre minden $x, y \in \mathbb{R}^+$ esetén teljesül, hogy

$$f(xy) + f(x) = f(y)f(xf(y)) + f(x)f(y),$$

és legfeljebb egy olyan $a \in \mathbb{R}^+$ létezik, melyre $f(a) = 1$.

T–3. Feladat

Az $n \times n$ -es négyzetrácson *kígyónak* nevezünk egy olyan utat, mely szomszédos mezők középpontjait összekötő szakaszokból áll úgy, hogy mind az n^2 középpontot pontosan egyszer érinti. Két mezőt most akkor nevezünk szomszédosnak, ha van közös oldaluk. Megjegyezzük, hogy egy ilyen kígyó minden szakasza párhuzamos a négyzetrács valamelyik vonalával. Az ábrán egy példa látható egy kígyóra a 4×4 -es négyzetrácsban. Ez a kígyó kilenc darab 90° -os fordulatot tesz, ezeket kis fekete négyzetek jelölik.



Nézzünk most egy kígyót, amely a 45×45 -ös négyzetrács mind a 2025 mezőjét érinti. Legfeljebb hány 90° -os fordulatot tehet egy ilyen kígyó?

T–4. Feladat

Legyen n egy pozitív egész szám. Laplandia tartományban $100n$ város van, és bármely kettő között vezet egy közvetlen autópálya. Minden ilyen autópályán van egy-egy díjbeszedő kapu, amely beszed valamekkora pozitív mennyiségű útdíjat. Minden autópálya esetén a rajta beszedett bevétel fele-fele arányban kerül a két városhoz, amelyeket az adott autópálya összeköt. Minden város esetén az összbevételt úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk, hogy a belőle kiinduló $100n - 1$ autópályából mennyi bevétele keletkezik az adott városnak.



Egy új törvény szerint a szövetségi kormány át fogja venni néhány díjbeszedő kapu üzemeltetését, vagyis az egy-egy ilyenből származó bevételt ezentúl a kormány fogja kapni, nem az autópálya két végén lévő két város. Laplandia kormányzója jelölheti ki, hogy melyik díjbeszedő kapukat vegye át a szövetségi kormány. A városok polgármesterei határozottan kérik, hogy az átállás után minden város összbevétele nagyrészt megmaradjon, azaz egyik város összbevétele se csökkenjen a jelenlegi összbevételének 99%-a alá.

Határozzátok meg (n függvényében) a legnagyobb k pozitív egész számot, melyre a kormányzó biztosan ki tud jelölni k díjbeszedő kaput a szövetségi kormány részére, de úgy, hogy közben a polgármesterek kérésének is eleget tesz.

T–5. Feladat

Az ABC hegyesszögű háromszögben $AB < AC$. Legyen az A -ból BC -re állított merőleges talppontja D . Legyen E az a pont, melyre $ABEC$ paralelogramma. Legyen M egy olyan pont az ABC háromszög belsejében, melyre $MB = MC$. Tükrözzük a D pontot az ADM háromszög körülírt köréhez M -ben húzott érintőre; az így kapott pont legyen F . Bizonyítsátok be, hogy $AF = DE$.

T–6. Feladat

Legyen az ABC hegyesszögű háromszögben D olyan belső pont, melyre $BDC\angle = 180^\circ - BAC\angle$. A BD és AC egyenesek metszéspontja E , a CD és AB egyenesek metszéspontja F . A $P \neq E$ és $Q \neq F$ pontok az EF egyenesen fekszenek úgy, hogy $BP = BE$ és $CQ = CF$. Tegyük fel, hogy az AP és AQ szakaszok az ABC háromszög ω körülírt körét rendre az $R \neq A$ és $S \neq A$ pontokban metszik. Bizonyítsátok be, hogy az RF és SE egyenesek ω -n metszik egymást.

T–7. Feladat

Legyen n olyan pozitív egész, melyre az $n^2 + n + 1$ szám pozitív osztóinak összege osztható 3-mal. Bizonyítsátok be, hogy az $n^2 + n + 1$ pozitív osztói szétoszthatók három nemüres halmazra úgy, hogy mindegyik halmazban azonos legyen az elemek szorzata.

T–8. Feladat

Határozzátok meg, hogy igaz-e az alábbi állítás minden olyan P polinomra, melynek foka legalább 2 és együtthatói nemnegatív egészek:

Létezik olyan m pozitív egész, hogy végtelen sok n pozitív egészre a $P^n(m)$ számnak több mint n különböző pozitív osztója van.

Megjegyzés. Itt P^n a P -nek n -szer való alkalmazását jelöli, vagyis

$$P^n(x) = \underbrace{P(P(\dots P(x) \dots))}_{n\text{-szer}}.$$