



Užduotis T–1

Bobas turi n monetų, kurių vertės yra sveikieji skaičiai

$$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n > 0.$$

Jis stovi prieš saldinių aparatą, kuriame yra n saldinių. Saldinių kainos yra teigiami sveikieji skaičiai $b_1, b_2, \dots, b_n$. Bobas pastebėjo, kad visiems $i \in \{1, \dots, n\}$ galioja, jog

$$b_1 + b_2 + \dots + b_i \geq c_1 + c_2 + \dots + c_i.$$

Be to, visų Bobo monetų verčių suma yra lygi visų saldinių kainų sumai. Saldiniai gali būti perkami bet kokia tvarka. Kad Bobas nusipirktų i -tąjį saldinį, jis turi įmesti į aparatą kažkiek monetų, kurių bendra vertė yra bent b_i . Tačiau, aparatas neduos grąžos.

Įrodykite, kad Bobas gali nusipirkti bent pusę saldinių

Užduotis T–2

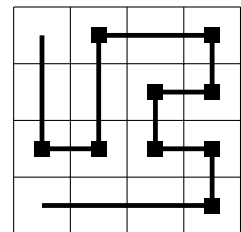
Tegul $\mathbb{R}^+$ žymi teigiamų realiųjų skaičių aibę. Raskite visas tokias funkcijas $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, kad visiems skaičiams $x, y \in \mathbb{R}^+$, galioja

$$f(xy) + f(x) = f(y)f(xf(y)) + f(x)f(y),$$

ir egzistuoja daugiausiai vienas toks skaičius $a \in \mathbb{R}^+$, kad $f(a) = 1$.

Užduotis T–3

Gyvatė $n \times n$ lentelėje yra toks kelias sudarytas iš atkarpų jungiančių gretimų langelių centrus, kad kiekvienas n^2 langelis būtų aplankytas lygiai vieną kartą. Du langeliai laikomi gretimais, jei jie turi bendrą kraštinę. Taigi, kiekviena atkarpa kelyje yra lygiagreti lentelės linijoms. Paveikslėlyje pavaizduotas pavyzdys gyvatės 4×4 lentelėje. Ši gyvatė atlieka devynis 90° posūkius, paveikslėlyje pažymėtus mažais juodais kvadrėliukais.



Nagrinėkime gyvatę einančią per visus 2025 langelius 45×45 lentelėje. Kiek daugiausiai 90° posūkių tokia gyvatė gali atlikti?

Užduotis T–4

Tegul n yra teigiamas sveikasis skaičius. Laplandijos šalyje yra $100n$ miestų. Bet kurie du miestai yra sujungti tiesioginiu keliu. Kiekviename kelyje yra vienas mokesčių punktas, surenkantis teigiamą mokesčių pajamų kiekį. Kiekvienam keliui, jame esančio punkto mokesčių pajamų kiekis yra lygiai padalinamas abiem miestam, kuriuos jungia tas kelias (tai reiškia, kad abu miestai gauna po pusę pajamų). Kiekvieno miesto pilnos pajamos yra suma pajamų, kurias jis gauna iš $100n - 1$ mokesčių punktų, esančių jo keliuose.

Įvedamas naujas įstatymas, pagal kurį iš kai kurių punktų visas pajamas rinks vyriausybė, o ne gretimi miestai. Tuos punktus pasirenka Laplandijos prezidentas. Kiekvienas miestas reikalauja,



kad suma likusių pajamų, kurias jis gauna iš punktų po įstatymo įvedimo, yra bent 99% prieš įstatymo įvedimą jo rinktų pajamų.

Raskite tokį didžiausią teigiamą sveikąjį skaičių k , priklausantį nuo n , kad prezidentas gali visada taip pasirinkti k punktų iš kurių vyriausybė rinks mokesčių pajamas, kad miestų reikalavimai būtų patenkinti.

Užduotis T–5

Tegul ABC yra smailusis trikampis kur $AB < AC$. Taškas D yra pagrindas statmenis iš A į BC . Pažymėkime tašką E taip, kad $ABEC$ būtų lygiagretainis. Tegul M yra toks taškas trikampio ABC viduje, kad $MB = MC$. Tarkime l yra apie ADM apibrėžto apskritimo liestinė taške M . Tegul F yra taško D atspindys tiesės l atžvilgiu. Įrodykite, kad $AF = DE$.

Užduotis T–6

Tegul ABC yra smailusis trikampis, o D yra toks taškas trikampio viduje, kad $\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC$. Tiesės BD ir AC susikerta taške E . Tiesės CD ir AB susikerta taške F . Taškai $P \neq E$ ir $Q \neq F$ taip pažymėti ant tiesės EF , kad $BP = BE$ ir $CQ = CF$. Tarkime, kad atkarpos AP ir AQ susikerta su apie trikampį ABC apibrėžtu apskritimu ω atitinkamai taškuose $R \neq A$ ir $S \neq A$. Įrodykite, kad tiesės RF ir SE susikerta ant ω .

Užduotis T–7

Tegul n yra toks teigiamas sveikasis skaičius, kad skaičiaus $n^2 + n + 1$ teigiamų daliklių suma dalinasi iš 3. Įrodykite, kad įmanoma taip suskirstyti visus skaičiaus $n^2 + n + 1$ teigiamus daliklius į tris aibes, kad kiekvienos aibės visų narių sandauga yra tokia pati.

Užduotis T–8

Nustatykite, ar šis teiginys yra teisingas visiems daugianariams P , kurie yra bent antrojo laipsnio ir kurių koeficientai yra neneigiami sveikieji skaičiai:

Egzistuoja toks teigiamas sveikasis skaičius m , kad yra be galo daug teigiamų sveikųjų skaičių n , kuriems skaičius $P^n(m)$ turi daugiau nei n skirtingų teigiamų daliklių.

Pastaba. Čia P^n žymi P pritaikytą n kartų. Tai yra $P^n(x) = \underbrace{P(P(\dots P(x) \dots))}_{n \text{ kartų}}$.