



Zadanie T–1

Robert ma n monet o całkowitych wartościach

$$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n > 0.$$

W automacie, przed którym stoi, można kupić n różnych batoników o kosztach $b_1, b_2, \dots, b_n$ będących liczbami całkowitymi. Robert zauważył, że dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$ zachodzi

$$b_1 + b_2 + \dots + b_i \geq c_1 + c_2 + \dots + c_i.$$

Co więcej, sumaryczna wartość wszystkich jego monet jest równa sumarycznemu kosztowi wszystkich batoników. Batoniki można kupować w dowolnej kolejności. Aby kupić i -ty batonik Robert musi wrzucić do automatu monety o łącznej wartości co najmniej b_i . Niestety automat nie wydaje mu reszty. Udowodnić, że Robert jest w stanie kupić co najmniej połowę batoników.

Zadanie T–2

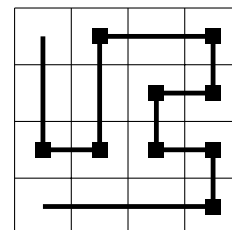
Niech $\mathbb{R}^+$ będzie zbiorem dodatnich liczb rzeczywistych. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, że dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}^+$ zachodzi

$$f(xy) + f(x) = f(y)f(xf(y)) + f(x)f(y),$$

oraz istnieje co najwyżej jedna liczba $a \in \mathbb{R}^+$ taka, że $f(a) = 1$.

Zadanie T–3

Węzem na planszy $n \times n$ nazywamy ścieżkę składającą się z odcinków łączących środki sąsiadujących pól, która przechodzi przez środki wszystkich n^2 pól dokładnie raz. Pola są sąsiadujące jeżeli mają wspólną krawędź; w szczególności, wszystkie odcinki składające się na węza są równoległe do osi poziomej lub pionowej. Obrazek pokazuje przykładowego węza na planszy 4×4 . Wąż ten wykonuje dziewięć zakrętów o 90° na polach oznaczonych przez małe czarne kwadraty.



Wyznaczyć największą możliwą liczbę zakrętów o 90° jaką może wykonać wąż przechodzący przez wszystkie 2025 pól planszy 45×45 .

Zadanie T–4

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Laplandia ma $100n$ miast, z których każde dwa są połączone bezpośrednią drogą, a na każdej z tych dróg znajduje się punkt poboru opłat, który pobiera pewną dodatnią opłatę. Dla każdej drogi, opłaty z niej są rozdzielone po równo między dwa miasta na jej końcu (to znaczy oba te miasta otrzymują połowę przychodów). Dla każdego miasta, jego łączne przychody są sumą przychodów ze wszystkich $100n - 1$ dróg z niego wychodzących.

Na mocy nowej ustawy, przychody z niektórych punktów poboru opłat będą pobierane przez rząd zamiast sąsiadujących miast. Premier Laplandii ma możliwość wybrania tych punktów poboru



opłat. Burmistrzowie miast wymagają, by przychody z punktów poboru, które im pozostaną po tej zmianie, były równe co najmniej 99% ich wcześniejszych łącznych przychodów. Znaleźć największą liczbę całkowitą dodatnią k , zależną od n , taką że premier może zawsze wybrać k dróg, z których opłaty będzie pobierał rząd, tak by spełnione były również wymagania burmistrzów.

Zadanie T–5

Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, takim że $AB < AC$. Oznaczmy przez D spodek wysokości z wierzchołka A na BC . Niech E będzie takim punktem, że $ABEC$ jest równoległobokiem. Niech M będzie punktem wewnątrz trójkąta ABC , takim że $MB = MC$. Niech F będzie odbiciem punktu D względem prostej stycznej w punkcie M do okręgu opisanego na trójkącie ADM . Udowodnić, że $AF = DE$.

Zadanie T–6

Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym z punktem D wewnątrz, takim że $\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC$. Proste BD i AC przecinają się w punkcie E , a proste CD i AB przecinają się w punkcie F . Punkty $P \neq E$ i $Q \neq F$ leżą na prostej EF w taki sposób, że $BP = BE$ i $CQ = CF$. Załóżmy, że odcinki AP i AQ przecinają okrąg opisany ω trójkąta ABC odpowiednio w punktach $R \neq A$ i $S \neq A$. Udowodnić, że proste RF i SE przecinają się na okręgu ω .

Zadanie T–7

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą taką, że suma dodatnich dzielników liczby $n^2 + n + 1$ jest podzielna przez 3. Udowodnić, że da się podzielić zbiór wszystkich dodatnich dzielników liczby $n^2 + n + 1$ na trzy zbiory, takie że iloczyn wszystkich elementów zbioru jest taki sam dla każdego z nich.

Zadanie T–8

Rozstrzygnąć czy poniższe stwierdzenie jest prawdziwe dla każdego wielomianu P o stopniu co najmniej 2 oraz nieujemnych współczynnikach całkowitych:

Istnieje dodatnia liczba całkowita m , taka że dla nieskończenie wielu dodatnich liczb całkowitych n liczba $P^n(m)$ ma więcej niż n różnych dodatnich dzielników.

Uwaga. Przez P^n oznaczamy tu n -krotne złożenie P , to znaczy $P^n(x) = \underbrace{P(P(\dots P(x) \dots))}_{n \text{ razy}}$.