



Naloga T-1

Jan ima n kovancev s celoštevilskimi vrednostmi

$$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n > 0.$$

Stoji pred avtomatom, ki ponuja n čokoladic, ki stanejo $b_1, b_2, \dots, b_n$, kjer so b_i naravna števila za vse $i \in \{1, \dots, n\}$. Jan opazi, da za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ velja

$$b_1 + b_2 + \dots + b_i \geq c_1 + c_2 + \dots + c_i.$$

Poleg tega je skupna vrednost njegovih kovancev enaka vsoti vrednosti vseh čokoladic. Čokolade lahko kupuje v poljubnem vrstnem redu. Za nakup i -te čokolade mora Jan v avtomat vstaviti kovance s skupno vrednostjo vsaj b_i . Žal mu avtomat pri tem ne vrača drobiža.

Dokaži, da lahko Jan kupi vsaj polovico čokoladic.

Naloga T-2

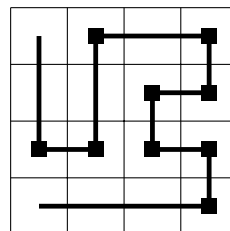
Naj bo $\mathbb{R}^+$ množica pozitivnih realnih števil. Določi vse funkcije $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, tako da za vsa števila $x, y \in \mathbb{R}^+$ velja

$$f(xy) + f(x) = f(y)f(xf(y)) + f(x)f(y)$$

in obstaja kvečjemu eno število $a \in \mathbb{R}^+$, za katerega je $f(a) = 1$.

Naloga T-3

Kača je pot v $n \times n$ tabeli, sestavljena iz daljic, ki povezujejo središča sosednjih celic, ki poteka skozi središča vseh n^2 celic in vsako celico obiše natanko enkrat. Dve celici sta sosednji, če si delita stranico. Vsi deli kače so torej vzporedni z mrežnimi črtami. Slika prikazuje primer kače v 4×4 tabeli. Ta kača se devetkrat obrne za 90° , kar je označeno z majhnimi črnimi kvadrati.



Denimo, da imamo kačo, ki poteka skozi vseh 2025 celic tabele velikosti 45×45 . Največ kolikokrat se lahko takšna kača obrne za 90° ?

Naloga T-4

Naj bo n naravno število. V Škofjeloškem kraljestvu je $100n$ mest, vsaki dve mesti pa sta povezani z direktno cesto. Vsaka taka cesta ima cestninsko postajo, ki pobira pozitivno količino cestnine, ta cestnina pa se nato enakomerno porazdeli med mestoma, ki ju cesta povezuje (torej vsako izmed dveh mest dobi polovico dobička). Skupni dobiček vsakega mesta je vsota dobičkov, ki jih prejme od $100n - 1$ cestninskih postaj na svojih cestah.

Po novem zakonu bo dobiček nekaterih postaj namesto sosednjih mest pobirala vlada. Izbira teh cestninskih postaj je prepuščena škofjeloškemu kralju Jakobu. Župani mest zahtevajo, da bo vsako mesto po tej spremembi prejelo vsaj 99% svojega prejšnjega dobička.

Določi največje naravno število k v odvisnosti od n , da lahko kralj Jakob vedno izbere takih k cestninskih postaj, katerih dobičke bo pobirala vlada, da ustreže zahtevi županov.

Čas: 5 ur

Čas za vprašanja: 60 min

Vsaka naloga je vredna 8 točk.

Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.



Naloga T–5

Naj bo ABC ostrokoten trikotnik z $AB < AC$. Z D označimo nožišče višine iz A na BC . Naj bo E taka točka, da je $ABEC$ paralelogram. Naj bo M točka v notranjosti trikotnika ABC , za katero velja $MB = MC$. S F označimo zrcalno sliko točke D preko tangente na očrtano krožnico trikotnika ADM v točki M . Dokaži, da $AF = DE$.

Naloga T–6

Naj bo ABC ostrokoten trikotnik in D točka v njegovi notranjosti, za katero velja $\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC$. Premici BD in AC se sekata v točki E , premici CD in AB pa v točki F . Točki $P \neq E$ in $Q \neq F$ ležita na premici EF , tako da $BP = BE$ in $CQ = CF$. Denimo, da daljci AP in AQ sekata očrtano krožnico ω trikotnika ABC v točkah $R \neq A$ in $S \neq A$ zaporedoma. Dokaži, da se premici RF in SE sekata na ω .

Naloga T–7

Naj bo n naravno število, za katerega je vsota pozitivnih deliteljev števila $n^2 + n + 1$ deljiva s 3. Dokaži, da je mogoče množico pozitivnih deliteljev $n^2 + n + 1$ razdeliti na tri množice, tako da je *zmnožek* vseh elementov vsake izmed množic enak.

Naloga T–8

Določi, ali sledeča trditev velja za vsak polinom P stopnje vsaj 2 z nenegativnimi celoštevilskimi koeficienti:

Obstaja naravno število m , tako da ima število $P^n(m)$ strogo več kot n različnih pozitivnih deliteljev za neskončno mnogo naravnih števil n .

Opomba. Tu P^n označuje uporabo P -ja n -krat zapored: $P^n(x) = \underbrace{P(P(\dots P(x) \dots))}_{n\text{-krat}}$.